ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 1) — Segundo cuatrimestre – 2019
Duración: 3 horas. — 19/II/20 – 9:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a esta evaluación integradora. Es posible que se haya cometido algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\| \cdot \|$ la norma inducida. Sean $\mathbb{S}$ un subespacio de dimensión finita de $\mathbb{V}$ y $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la proyección ortogonal sobre $\mathbb{S}$. **Demostrar** que $\|P_{\mathbb{S}}(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$.

Resolución.

Sea v un vector cualquiera de $\mathbb{V}$. Por definición, $P_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ y $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$. Como $v = P_{\mathbb{S}}(v) + (v - P_{\mathbb{S}}(v))$ y $\langle P_{\mathbb{S}}(v), v - P_{\mathbb{S}}(v) \rangle = 0$, por el *teorema de Pitágoras* resulta que $\|v\|^2 = \|P_{\mathbb{S}}(v)\|^2 + \|v - P_{\mathbb{S}}(v)\|^2 \geq \|P_{\mathbb{S}}(v)\|^2$ y de aquí se deduce que $\|P_{\mathbb{S}}(v)\| \leq \|v\|$. $\square$

---

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica y definida positiva tal que $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$ y $\operatorname{tr}(A) = 8$ ¿Es única?

Resolución.

De acuerdo con el *teorema espectral*, una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es simétrica y definida positiva si, y sólo si, el conjunto de todos sus autovalores $\sigma(A)$ está contenido en la semirecta de los números reales positivos, $\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ y $\operatorname{nul}(A - \lambda I) \perp \operatorname{nul}(A - \lambda' I)$ para cualquier pareja de autovalores $\lambda \neq \lambda'$.

Como los vectores $v_1 := \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $v_2 := \begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ deben ser autovectores de A y no son ortogonales, la descomposición anterior implica que existe $\lambda_0 \in \sigma(A)$ tal que $\operatorname{gen}\{v_1, v_2\} \subseteq \operatorname{nul}(A - \lambda_0 I)$, y en consecuencia la multiplicidad algebraica de λ_0 debe ser 2 o 3.

Si la multiplicidad algebraica de λ_0 fuese 3 las condiciones $\det(A) = 18$ y $\operatorname{tr}(A) = 8$ implicarían que $\lambda_0^3 = 18$ y $3\lambda_0 = 8$. Pero como $(8/3)^3 \neq 18$, esa situación queda descartada.

De acuerdo con el razonamiento anterior, la matriz que estamos buscando tiene 2 autovalores: uno doble al que denotamos por λ_0 y otro simple al denotaremos por λ_1. Además $\operatorname{nul}(A - \lambda_0 I) = \operatorname{gen}\{v_1, v_2\}$ y $\operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{gen}\{v_3\}$, donde $v_3 \in \{v_1, v_2\}^{\perp}$. Si elegimos $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix}0 & -4 & 3\end{bmatrix}^T$ la matriz A debe ser de la forma

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}^{-1},$$

donde λ_0, λ_1 son dos números positivos que resuelven el sistema de ecuaciones $\lambda_0^2\lambda_1 = 18$ y $2\lambda_0 + \lambda_1 = 8$. A simple vista, se observa que $\lambda_0 = 3$ y $\lambda_1 = 2$ satisfacen esas dos ecuaciones.

Por lo tanto, la matriz que estamos buscando es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -8 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6/25 & -8/25 \\ 0 & 3/25 & 4/25 \\ 0 & -4/25 & 3/25 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 59/25 & 12/25 \\ 0 & 12/25 & 66/25 \end{bmatrix}.$$

¿Hay otra? Para responder esta pregunta examinaremos con mayor detalle las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda_0^2\lambda_1 = 18 \\ 2\lambda_0 + \lambda_1 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{18}{\lambda_0^2} \\ 2\lambda_0^3 + 18 = 8\lambda_0^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{18}{\lambda_0^2} \\ \lambda_0^3 - 4\lambda_0^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

Como $\lambda_0^3 - 4\lambda_0^2 + 9 = (\lambda_0 - 3)(\lambda_0^2 - \lambda_0 - 3)$ y la ecuación $\lambda_0^2 - \lambda_0 - 3 = 0$ tiene dos soluciones reales $\lambda_0^- = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ y $\lambda_0^+ = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, una de las cuales es positiva. Se deduce que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7-\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

es otra matriz que posee las propiedades requeridas por el enunciado del problema. □

---

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **Encontrar** los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática $Q(x) = x^T A x$ bajo la condición $\|x\| = 3$ e **indicar** en cuáles de esos puntos se realizan dichos extremos.

Resolución.

Como consecuencia del *teorema de Rayleigh* aplicado a la matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sabemos que

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^3: \\ \|x\|=3}} Q(x) = 9\lambda_m \text{ y } \arg\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^3: \\ \|x\|=3}} Q(x) = \{x \in \operatorname{nul}(A - \lambda_m I) : \|x\| = 3\},$$

donde λ_m es el autovalor mínimo de A, y también sabemos que

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^3: \\ \|x\|=3}} Q(x) = 9\lambda_M \text{ y } \arg\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^3: \\ \|x\|=3}} Q(x) = \{x \in \operatorname{nul}(A - \lambda_M I) : \|x\| = 3\},$$

donde λ_M es el autovalor máximo de A.

Como el polinomio característico de la matriz A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = ((1-\lambda)^2 - 1)(1-\lambda) = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda),$$

se puede ver que $\lambda_m = 0$ y $\lambda_M = 2$. Por otra parte, se puede ver que

$$x \in \mathrm{nul}(A - 0I) \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x \in \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$x \in \mathrm{nul}(A - 2I) \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x \in \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

El análisis anterior nos permite concluir que

- 0 *es el valor mínimo de la forma cuadrática* $Q(x)$ *bajo la condición* $\|x\| = 3$ *y los puntos donde se realiza son* $v_m^- = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$ *y* $v_m^+ = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$.
- 18 *es el valor máximo de la forma cuadrática* $Q(x)$ *bajo la condición* $\|x\| = 3$ *y los puntos donde se realiza son* $v_M^- = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$ *y* $v_M^+ = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$.

□

---

4. Sean a y b dos números reales tales que la función $y(t) = te^t$ es solución de la ecuación diferencial homogénea $y'' + ay' + by = 0$. **Hallar** todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = \cos(t)$.

Resolución.

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $L_(y) := y'' + ay' + by$. Se sabe que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $L(y) = \cos(t)$ tiene la forma $y_p + \mathrm{Nu}(L)$, donde $y_p \in C^\infty(\mathbb{R})$ es cualquier función que satisface $L(y_p) = \cos(t)$ y $\mathrm{Nu}(L) = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : L(y) = 0\}$ es el núcleo de L.

Por hipótesis, se sabe que los números a y b verifican la ecuación $L(te^t) = 0$. Utilizando las reglas de derivación se obtiene que

$$L(te^t) = te^t + 2e^t + a(te^t + e^t) + bte^t = (1 + a + b)te^t + (2 + a)e^t,$$

y como las funciones e^t y te^t son linealmente independientes resulta que los coeficientes a y b satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = 1 + a + b \\ 0 = 2 + a \end{cases}$$

de donde se concluye que $a = -2$ y $b = 1$. El problema se redujo a determinar el núcleo de la transformación lineal $L(y) = y'' - 2y' + y$ y a encontrar una solución particular de la ecuación $L(y) = \cos(t)$.

Como $L = D^2 - 2D + I = (D - I)^2$, donde $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ es el operador de derivación, se sabe que el conjunto $\{e^t, te^t\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(L)$. Para encontrar una solución particular de la ecuación $L(y) = \cos(t)$ se la puede buscar entre las funciones de la forma $\alpha\cos(t) + \beta\,\mathrm{sen}(t)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Utilizando las reglas de derivación se obtiene que

$$L(\cos(t)) = -\cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t) = 2\,\mathrm{sen}(t)$$
$$L(\mathrm{sen}(t)) = -\,\mathrm{sen}(t) - 2\cos(t) + \mathrm{sen}(t) = -2\cos(t)$$

y en consecuencia $L(\alpha\cos(t)+\beta\,\mathrm{sen}(t)) = 2\alpha\,\mathrm{sen}(t) - 2\beta\cos(t)$, cuyo lado derecho se convierte en $\cos(t)$ si ponemos $\alpha = 0$ y $\beta = -\frac{1}{2}$.

Como $y_p(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(t)$ es una solución particular de la ecuación $L(y) = \cos(t)$ y $\{e^t, te^t\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(L)$ se concluye que *todas las soluciones de la ecuación* $y'' - 2y' + y = \cos(t)$ *son de la forma*

$$y(t) = a_1e^t + a_2te^t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(t), \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

□

---

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la reflexión con respecto al plano $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ y sea A la matriz de T respecto de la base canónica. **Resolver** el problema a valores iniciales $X' = (A+3I)X$ con $X(0) = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

Resolución.

Por definición, T es la única transformación lineal tal que $T(v) = v$ para todo $v \in \Pi$ y $T(v) = -v$ para todo $v \in \Pi^\perp$. En particular, si $\mathcal{B}_\Pi = \{v_1, v_2\}$ es una base de Π y $\mathcal{B}_{\Pi^\perp}$ es una base de $\Pi^\perp$, se tiene que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\Pi \cup \mathcal{B}_{\Pi^\perp} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de T tal que

$$A\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

y de aquí se deduce inmediatamente que

$$(A+3I)\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, cualquier solución X del sistema $X' = (A+3I)X$ se escribe de manera única como una combinación lineal de la forma

$$X(t) = a_1e^{4t}v_1 + a_2e^{4t}v_2 + a_3e^{2t}v_3,$$

para algunos $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. La solución del problema a valores iniciales $X(0) = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ es aquella en la que los valores a_1, a_2, a_3 satisfacen que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Al examinar la definición del plano Π se puede observar que $\mathcal{B}_\Pi = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ es una base de Π y que $\mathcal{B}_{\Pi^\perp} = \left\{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ es una base de $\Pi^\perp$. También se puede ver que la solución de la ecuación

$$a_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$$

es $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Estas observaciones junto con el argumento desarrollado más arriba nos permiten concluir que *la solución del problema a valores iniciales* $X' = (A + 3I)X$ *con* $X(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ *es*

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{4t} + e^{2t} \\ 2e^{4}t - e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$\square$

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 2) — Segundo cuatrimestre – 2019

Duración: 3 horas. — 19/II/20 – 9:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a esta evaluación integradora. Es posible que se haya cometido algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\| \cdot \|$ la norma inducida. Sean $\mathbb{S}$ un subespacio de dimensión finita de $\mathbb{V}$ y $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la proyección ortogonal sobre $\mathbb{S}$. **Demostrar** que $\|P_{\mathbb{S}}(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$.

Resolución.

Sea v un vector cualquiera de $\mathbb{V}$. Por definición, $P_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ y $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$. Como $v = P_{\mathbb{S}}(v) + (v - P_{\mathbb{S}}(v))$ y $\langle P_{\mathbb{S}}(v), v - P_{\mathbb{S}}(v) \rangle = 0$, por el *teorema de Pitágoras* resulta que $\|v\|^2 = \|P_{\mathbb{S}}(v)\|^2 + \|v - P_{\mathbb{S}}(v)\|^2 \geq \|P_{\mathbb{S}}(v)\|^2$ y de aquí se deduce que $\|P_{\mathbb{S}}(v)\| \leq \|v\|$. $\square$

---

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica y definida positiva tal que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$ y $\operatorname{tr}(A) = 8$ ¿Es única?

Resolución.

De acuerdo con el *teorema espectral*, una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es simétrica y definida positiva si, y sólo si, el conjunto de todos sus autovalores $\sigma(A)$ está contenido en la semirecta de los números reales positivos, $\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ y $\operatorname{nul}(A - \lambda I) \perp \operatorname{nul}(A - \lambda' I)$ para cualquier pareja de autovalores $\lambda \neq \lambda'$.

Como los vectores $v_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $v_2 := \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ deben ser autovectores de A y no son ortogonales, la descomposición anterior implica que existe $\lambda_0 \in \sigma(A)$ tal que $\operatorname{gen}\{v_1, v_2\} \subseteq \operatorname{nul}(A - \lambda_0 I)$, y en consecuencia la multiplicidad algebraica de λ_0 debe ser 2 o 3.

Si la multiplicidad algebraica de λ_0 fuese 3 las condiciones $\det(A) = 18$ y $\operatorname{tr}(A) = 8$ implicarían que $\lambda_0^3 = 18$ y $3\lambda_0 = 8$. Pero como $(8/3)^3 \neq 18$, esa situación queda descartada.

De acuerdo con el razonamiento anterior, la matriz que estamos buscando tiene 2 autovalores: uno doble al que denotamos por λ_0 y otro simple al denotaremos por λ_1. Además $\operatorname{nul}(A - \lambda_0 I) = \operatorname{gen}\{v_1, v_2\}$ y $\operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{gen}\{v_3\}$, donde $v_3 \in \{v_1, v_2\}^\perp$. Si elegimos $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$ la matriz A debe ser de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1},$$

donde λ_0, λ_1 son dos números positivos que resuelven el sistema de ecuaciones $\lambda_0^2 \lambda_1 = 18$ y $2\lambda_0 + \lambda_1 = 8$. A simple vista, se observa que $\lambda_0 = 3$ y $\lambda_1 = 2$ satisfacen esas dos ecuaciones.

Por lo tanto, la matriz que estamos buscando es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -6 \\ 0 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8/25 & -6/25 & 1 \\ 4/25 & 3/25 & 0 \\ -3/25 & 4/25 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 66/25 & 12/25 & 0 \\ 12/25 & 59/25 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

¿Hay otra? Para responder esta pregunta examinaremos con mayor detalle las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda_0^2\lambda_1 = 18 \\ 2\lambda_0 + \lambda_1 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{18}{\lambda_0^2} \\ 2\lambda_0^3 + 18 = 8\lambda_0^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{18}{\lambda_0^2} \\ \lambda_0^3 - 4\lambda_0^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

Como $\lambda_0^3 - 4\lambda_0^2 + 9 = (\lambda_0 - 3)(\lambda_0^2 - \lambda_0 - 3)$ y la ecuación $\lambda_0^2 - \lambda_0 - 3 = 0$ tiene dos soluciones reales $\lambda_0^- = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ y $\lambda_0^+ = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, una de las cuales es positiva. Se deduce que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7-\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

es otra matriz que posee las propiedades requeridas por el enunciado del problema. □

---

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **Encontrar** los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ bajo la condición $\|x\| = 5$ e **indicar** en cuáles de esos puntos se realizan dichos extremos.

Resolución.

Como consecuencia del *teorema de Rayleigh* aplicado a la matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sabemos que

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^3:\\ \|x\|=5}} Q(x) = 25\lambda_m \text{ y } \arg\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^3:\\ \|x\|=5}} Q(x) = \{x \in \operatorname{nul}(A - \lambda_m I) : \|x\| = 5\},$$

donde λ_m es el autovalor mínimo de A, y también sabemos que

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^3:\\ \|x\|=5}} Q(x) = 25\lambda_M \text{ y } \arg\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^3:\\ \|x\|=5}} Q(x) = \{x \in \operatorname{nul}(A - \lambda_M I) : \|x\| = 5\},$$

donde λ_M es el autovalor máximo de A.

Como el polinomio característico de la matriz A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = ((1-\lambda)^2 - 1)(1-\lambda) = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda),$$

se puede ver que $\lambda_m = 0$ y $\lambda_M = 2$. Por otra parte, se puede ver que

$$x \in \mathrm{nul}(A - 0I) \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x \in \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$x \in \mathrm{nul}(A - 2I) \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x \in \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

El análisis anterior nos permite concluir que

- 0 *es el valor mínimo de la forma cuadrática* $Q(x)$ *bajo la condición* $\|x\| = 5$ *y los puntos donde se realiza son* $v_m^- = \begin{bmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$ *y* $v_m^+ = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$.
- 50 *es el valor máximo de la forma cuadrática* $Q(x)$ *bajo la condición* $\|x\| = 5$ *y los puntos donde se realiza son* $v_M^- = \begin{bmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$ *y* $v_M^+ = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$.

$\square$

---

4. Sean a y b dos números reales tales que la función $y(t) = te^t$ es solución de la ecuación diferencial homogénea $y'' + ay' + by = 0$. **Hallar** todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = \mathrm{sen}(t)$.

Resolución.

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $L_(y) := y'' + ay' + by$. Se sabe que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $L(y) = \mathrm{sen}(t)$ tiene la forma $y_p + \mathrm{Nu}(L)$, donde $y_p \in C^\infty(\mathbb{R})$ es cualquier función que satisface $L(y_p) = \mathrm{sen}(t)$ y $\mathrm{Nu}(L) = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : L(y) = 0\}$ es el núcleo de L.

Por hipótesis, se sabe que los números a y b verifican la ecuación $L(te^t) = 0$. Utilizando las reglas de derivación se obtiene que

$$L(te^t) = te^t + 2e^t + a(te^t + e^t) + bte^t = (1 + a + b)te^t + (2 + a)e^t,$$

y como las funciones e^t y te^t son linealmente independientes resulta que los coeficientes a y b satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = 1 + a + b \\ 0 = 2 + a \end{cases}$$

de donde se concluye que $a = -2$ y $b = 1$. El problema se redujo a determinar el núcleo de la transformación lineal $L(y) = y'' - 2y' + y$ y a encontrar una solución particular de la ecuación $L(y) = \mathrm{sen}(t)$.

Como $L = D^2 - 2D + I = (D - I)^2$, donde $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ es el operador de derivación, se sabe que el conjunto $\{e^t, te^t\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(L)$. Para encontrar una solución particular de la ecuación $L(y) = \mathrm{sen}(t)$ se la puede buscar entre las funciones de la forma $\alpha\cos(t) + \beta\,\mathrm{sen}(t)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Utilizando las reglas de derivación se obtiene que

$$L(\cos(t)) = -\cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t) = 2\,\mathrm{sen}(t)$$
$$L(\mathrm{sen}(t)) = -\,\mathrm{sen}(t) - 2\cos(t) + \mathrm{sen}(t) = -2\cos(t)$$

y en consecuencia $L(\alpha\cos(t)+\beta\operatorname{sen}(t)) = 2\alpha\operatorname{sen}(t)-2\beta\cos(t)$, cuyo lado derecho se convierte en $\operatorname{sen}(t)$ si ponemos $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 0$.

Como $y_p(t) = \frac{1}{2}\cos(t)$ es una solución particular de la ecuación $L(y) = \operatorname{sen}(t)$ y $\{e^t, te^t\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(L)$ se concluye que *todas las soluciones de la ecuación* $y''-2y'+y = \operatorname{sen}(t)$ *son de la forma*

$$y(t) = a_1 e^t + a_2 t e^t + \frac{1}{2}\cos(t), \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

□

---

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la reflexión con respecto al plano $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y sea A la matriz de T respecto de la base canónica. **Resolver** el problema a valores iniciales $X' = (A+3I)X$ con $X(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Resolución.

Por definición, T es la única transformación lineal tal que $T(v) = v$ para todo $v \in \Pi$ y $T(v) = -v$ para todo $v \in \Pi^\perp$. En particular, si $\mathcal{B}_\Pi = \{v_1, v_2\}$ es una base de Π y $\mathcal{B}_{\Pi^\perp}$ es una base de $\Pi^\perp$, se tiene que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\Pi \cup \mathcal{B}_{\Pi^\perp} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de T tal que

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y de aquí se deduce inmediatamente que

$$(A+3I)\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, cualquier solución X del sistema $X' = (A+3I)X$ se escribe de manera única como una combinación lineal de la forma

$$X(t) = a_1 e^{4t} v_1 + a_2 e^{4t} v_2 + a_3 e^{2t} v_3,$$

para algunos $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. La solución del problema a valores iniciales $X(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ es aquella en la que los valores a_1, a_2, a_3 satisfacen que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Al examinar la definición del plano Π se puede observar que $\mathcal{B}_\Pi = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$ es una base de Π y que $\mathcal{B}_{\Pi^\perp} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right\}$ es una base de $\Pi^\perp$. También se puede ver que la solución de la ecuación

$$a_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Estas observaciones junto con el argumento desarrollado más arriba nos permiten concluir que *la solución del problema a valores iniciales* $X' = (A+3I)X$ *con* $X(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ *es*

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{4t} + e^{2t} \\ e^{2t} \\ 2e^{4t} - e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$\square$